Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

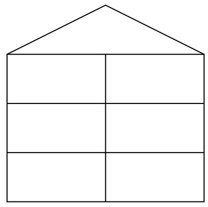
- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklasse **5**

62. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

620511



In der Alphastraße 13 steht ein drei Stockwerke hohes Wohnhaus.
In jedem Stockwerk sind zwei Wohnungen (siehe Skizze).

Über die Bewohner ist Folgendes bekannt:

(1) In diesem Haus wohnen genau sechs Kinder:
Alex, Bibi, Clara, Dominik, Erik und Ferdinand.

(2) In der Wohnung unten rechts wohnt Herr Schäfer allein mit seinem Hund Balko.
In allen anderen Wohnungen wohnt wenigstens ein Kind.

(3) Wenn die Geschwister Bibi und Clara zu ihrem Freund Erik gehen wollen, brauchen sie nur geradeaus über den Flur zu gehen.

(4) Dominik wohnt ganz oben. Weiter unten auf der gleichen Hausseite wohnt Ferdinand.

(5) Erik wohnt auf der rechten Seite des Hauses.

Ermittle für jedes Kind, in welcher Wohnung es wohnt. Schreibe genau auf, woraus sich die gefundenen Zuordnungen ergeben.

620512

Das alte Geldsystem in England war komplizierter als das heutige:

Ein Pfund Sterling (kurz 1 Pfund) war 20 Shilling wert, jeder Shilling hatte 12 Penny, und jeder Penny hatte vier Farthing.

a) Wie viele Farthings entsprachen einem Pfund?

b) Eine Fahrkarte kostete „3 Pfund 7 Shilling 8 Penny“.
Wie viele Münzen brauchte man, wenn man diese Summe nur in 1-Penny-Münzen bezahlen wollte?

c) Addiere „2 Pfund 12 Shilling 5 Penny 2 Farthing“ und „3 Pfund 15 Shilling 8 Penny 3 Farthing“.
Im Ergebnis darf die Anzahl der Shilling nicht über 19, die Anzahl der Pennies nicht über 11 und die Anzahl der Farthings nicht über 3 liegen.

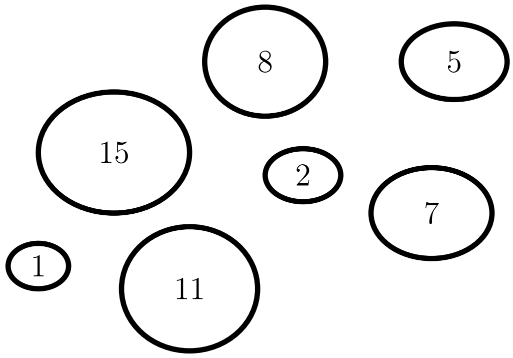
d) Ein Kunde muss für eine Jacke 7 Pfund 7 Shilling 7 Penny bezahlen. Er gibt dem Händler einen 10-Pfund-Geldschein.
Wie viel Geld erhält der Kunde zurück?

Verwende als Abkürzungen „£“ für Pfund, „Sh“ für Shilling, „P“ für Penny und „F“ für Farthing.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

620513

Die Abbildung zeigt eine Inselgruppe mit sieben Inseln. Jede der Inseln hat eine andere Größe, die durch die jeweilige Zahl in der Insel angegeben wird. Möchte man nun von einer Insel zur anderen gerudert werden, so muss man für die Strecke einen Preis in Kauri bezahlen, der der Differenz zwischen den Größen entspricht, wobei immer die kleinere von der größeren Zahl abgezogen wird (also zum Beispiel 7 Kauri von der Insel 15 zur Insel 8 oder 10 Kauri von der Insel 1 zur Insel 11).



a) Ein Tourist möchte von der Insel 15 zur Insel 1 gerudert werden und dabei alle anderen Inseln besuchen. Außerdem möchte er möglichst wenig Kauri ausgeben.
In welcher Reihenfolge sollte er die Inseln anfahren lassen, damit er so wenig Kauri wie möglich bezahlen muss? Begründe, dass es keine günstigere Reihenfolge gibt.

b) Wie viel kostet der billigste Rundweg von der Insel 8 zur Insel 8, auf dem unterwegs ebenfalls alle anderen Inseln besucht werden?

620514

a) Wenn eine Gerade durch ein Rechteck verläuft, entstehen zwei Teilflächen.
Wie viele Ecken können die entstehenden Teilflächen haben?
Zeichne jeweils ein Beispiel.

b) Bestimme die möglichen Anzahlen von Teilflächen, wenn zwei Geraden durch ein Rechteck verlaufen.
Zeichne für jede mögliche Anzahl ein Beispiel.

c) Bestimme die möglichen Anzahlen von Teilflächen, wenn drei Geraden durch ein Rechteck verlaufen.
Zeichne für jede mögliche Anzahl ein Beispiel.

d) Bestimme die kleinste und die größte Anzahl von Teilflächen, wenn vier Geraden durch ein Rechteck verlaufen.
Zeichne jeweils ein Beispiel.

Hinweis: Eine Gerade ist eine gerade Linie, die auf beiden Seiten kein Ende hat. Es dürfen keine zwei Geraden übereinanderliegen.

Olympiadeklasse

6

62. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

620611

Anton, Ben, Carlo und Dominik trainieren die Ballsportarten Basketball, Fußball, Handball und Volleyball, aber jeder eine andere. Die Mannschaften haben Heimtrikots in den Farben Blau, Grün, Orange und Türkis, aber jede Mannschaft nur eine der Farben und jede eine andere. Die Hosen haben die Farben Lila, Rot, Schwarz und Weiß, aber jede Mannschaft hat nur eine der Farben ausgewählt und jede eine andere.

Folgendes ist bekannt:

(1) Anton spielt nicht Basketball und auch nicht Fußball; seine Trikotfarbe ist grün.
(2) Das Trikot von Ben ist nicht orange; er trägt eine weiße Hose.
(3) Carlo ist nicht der Fußballer, er trägt ein türkises Trikot; seine Hose ist nicht schwarz.
(4) Dominik ist der Volleyballer und seine Hose ist rot.

Ermittle, welcher Junge welche Ballsportart betreibt, welche Farbe sein Trikot und welche Farbe seine Hose hat.

620612

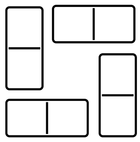
Eine Aufgabe für das aktuelle Jahr 2022:

a) Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 0 und 2 bilden?
b) Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 0 und 2 bilden?
c) Ermittle die Anzahl der fünfstelligen Zahlen, die nur die Ziffern 0 und 2 enthalten und in denen die Ziffernfolge 2022 enthalten ist.
d) Ermittle die Anzahl der sechsstelligen Zahlen, die nur die Ziffern 0 und 2 enthalten und in denen die Ziffernfolge 2022 enthalten ist.

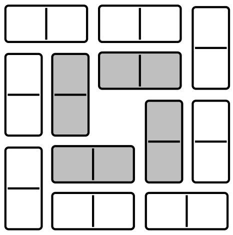
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

620613

Maria legt aus vier Dominosteinen einen quadratischen Ring (Abbildung A 620613 a). Dann nimmt Maria weitere Dominosteine und legt um den ersten einen zweiten Ring (Abbildung A 620613 b), dann einen dritten, einen vierten usw.



A 620613 a



A 620613 b

a) Wie viele Dominosteine benötigt Maria jeweils für den dritten, für den vierten und für den fünften Ring?

b) Berechne, wie viele Dominosteine Maria für den 20. und für den 100. Ring benötigen würde.

c) Wie viele Dominosteine müsste Maria insgesamt haben, damit sie so eine Figur mit 100 Ringen legen könnte?

620614

Die Zahl 1000 lässt sich als Summe von Zahlen, die nur ein- und dieselbe Ziffer enthalten, darstellen. Zum Beispiel kann man aus 8-mal der Ziffer 8 die Summe $888+88+8+8+8 = 1000$ bilden.

a) Bilde die Summe 1000 unter Verwendung von 20-mal der Ziffer 5.

b) Die Summe 1000 soll unter Verwendung von Zahlen gebildet werden, die nur die Ziffer 1 enthalten.
Welches ist die kleinste Anzahl der Ziffer 1, die dafür nötig ist?

c) Begründe, dass es nicht möglich ist, die Summe 1000 unter Verwendung von Zahlen zu bilden, die nur die Ziffer 3 enthalten.

Olympiadeklasse
7

62. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

620711

Die sechs Kinder Ayla, Ben, Cem, Dana, Emma und Finn spendeten jeder einen Teil ihres Taschengeldes für den Umweltschutz. Über die Beträge, die sie spendeten, ist Folgendes bekannt:

(1) Jedes Kind spendete einen ganzzahligen Euro-Betrag.
(2) Der kleinste gespendete Betrag ist 6 Euro. Der größte gespendete Betrag ist 12 Euro.
(3) Ayla spendete mehr als Ben.
(4) Cem spendete mehr als Dana und Dana spendete mehr als Ben.
(5) Cem spendete mehr als Ayla.
(6) Cem spendete 2 Euro weniger als Finn.
(7) Ben spendete 2 Euro mehr als Emma.

Ermittle, welchen Betrag jedes Kind spendete.

620712

Luisa will sich in diesem Schuljahr in Französisch verbessern. Darum hat sie in den letzten drei Wochen der Sommerferien fleißig Vokabeln gelernt, insgesamt 12 Stunden, so wie sie es sich vorgenommen hatte. In der zweiten Woche hat Luisa 3 Stunden und 20 Minuten länger Französisch-Vokabeln gelernt als in der ersten Woche. In der dritten Woche hat sie 2 Stunden und 10 Minuten länger Französisch-Vokabeln gelernt als in der ersten Woche.

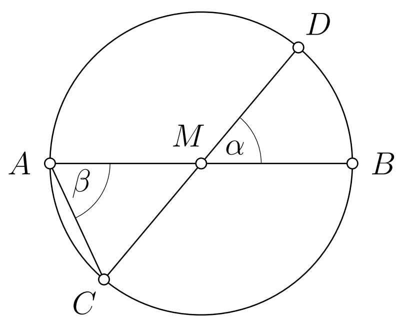
Ermittle, wie lange Luisa in jeder der drei Wochen Französisch-Vokabeln gelernt hat.

620713

Die nebenstehende nicht maßstäbliche Abbildung zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und den Durchmessern $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

Die Größe des Winkels $\sphericalangle BMD$ ist mit α, die Größe des Winkels $\sphericalangle CAM$ mit β bezeichnet.

a) Begründe, dass $\beta = 56°$ gilt, wenn $\alpha = 68°$ gilt.
b) Ermittle α, wenn β doppelt so groß wie α ist.



Auf der nächsten Seite geht es weiter!

620714

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) und der größte gemeinsame Teiler (ggT) von Zahlen spielen unter anderem in der Bruchrechnung und der Zahlentheorie eine wichtige Rolle.

a) Gib von den Zahlen 48 und 540 die Primfaktorzerlegungen, den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache an.

b) Ermittle die kleinsten vier natürlichen Zahlen, die mit der Zahl 48 jeweils den größten gemeinsamen Teiler 6 haben.

c) Ermittle alle natürlichen Zahlen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches mit 36 jeweils die Zahl 540 ist.

Olympiadeklasse **8**

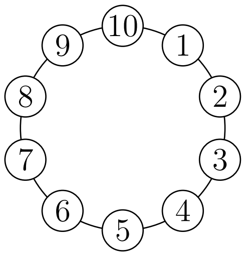
62. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

620811

a) Die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 sind an einem Kreis im Uhrzeigersinn angeordnet, siehe Abbildung A 620811 a. Mit 1 beginnend wird in mehreren Umläufen im Uhrzeigersinn jede 4. Zahl weggestrichen (also die Zahlen 1, 5, 9, ...), bis nur noch Zahlen getroffen werden, die schon weggestrichen sind. Dabei werden die weggestrichenen Zahlen stets mitgezählt.

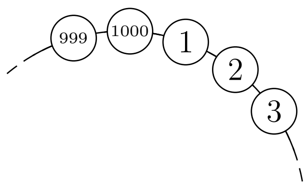
Ermittle, wie viele der natürlichen Zahlen von 1 bis 10 auf diese Weise nicht weggestrichen werden.



A 620811 a

b) Die natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 sind an einem Kreis im Uhrzeigersinn angeordnet, siehe Abbildung A 620811 b. Mit 1 beginnend wird in mehreren Umläufen im Uhrzeigersinn jede 15. Zahl weggestrichen (also die Zahlen 1, 16, 31, 46, 61, ...), bis nur noch Zahlen getroffen werden, die schon weggestrichen sind. Dabei werden die weggestrichenen Zahlen stets mitgezählt.

Ermittle, wie viele der natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 auf diese Weise nicht weggestrichen werden.



A 620811 b

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

620812

Herr Bartz hatte in den Klassen 8a und 8b die gleiche Klassenarbeit geschrieben. Es sind insgesamt 50 Arbeiten. Der Notendurchschnitt, also das arithmetische Mittel aller Noten, ist 2,7. Herr Bartz hat auch den Notendurchschnitt jeder Klasse einzeln berechnet. Danach fiel ihm auf, dass er Mia, die die Note 2 erhielt, versehentlich der 8b zugeordnet hat, obwohl sie in die 8a geht. Deshalb berechnet er die Durchschnitte erneut und staunt: Sowohl der Notendurchschnitt der 8a als auch der Notendurchschnitt der 8b sind besser als bei der ersten Rechnung.

a) Gib eine mögliche Verteilung von Noten der Schülerinnen und Schüler der beiden Klassen bei dieser Klassenarbeit an, bei der der Notendurchschnitt aller 50 Arbeiten 2,7 ist, Mia eine 2 erhält und die Notendurchschnitte der beiden Klassen bei der zweiten Berechnung tatsächlich jeweils besser als bei der ersten Berechnung sind. Begründe deine Angabe.

b) Kann auf Basis der vorhandenen Informationen hergeleitet werden, welche der beiden Klassen den besseren Notendurchschnitt hat? Begründe deine Antwort.

620813

Es sei ABC ein Dreieck mit einem rechten Innenwinkel im Punkt C. Die Länge der Seite $\overline{AC}$ sei kleiner als die Länge der Seite $\overline{BC}$. Weiter seien X, Y und Z drei Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Punkte X, Y und Z sind von den Punkten A, B und C verschieden.

(2) Der Punkt X liegt auf der Seite $\overline{AC}$.

(3) Der Punkt Y liegt so auf der Seite $\overline{AB}$, dass die Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{XY}$ gleich lang sind.

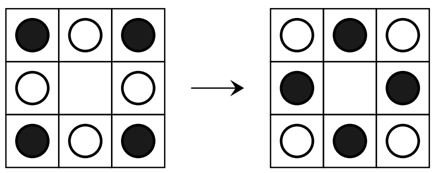
(4) Der Punkt Z liegt so auf der Seite $\overline{BC}$, dass der Winkel $\sphericalangle ZYX$ ein rechter Winkel ist.

a) Fertige eine Zeichnung an, die den beschriebenen Sachverhalt veranschaulicht.

b) Drücke die Länge des Umfangs des Vierecks $CXYZ$ durch die Seitenlängen des Dreiecks ABC aus.

620814

Auf einem quadratischen Spielbrett mit 9 Feldern liegen zu Beginn 4 weiße und 4 schwarze Spielsteine, wie es im Bild das linke Spielfeld zeigt. Ein Spielzug besteht darin, einen Spielstein waagerecht oder senkrecht auf das jeweils leere Feld zu ziehen. Ziel ist, dass die Spielsteine so liegen, wie es im Bild das rechte Spielfeld zeigt.



a) Gib eine Folge von 12 Spielzügen an, mit der das Ziel erreicht wird.

b) Begründe, warum stets eine gerade Anzahl an Spielzügen durchgeführt werden muss, um das Ziel zu erreichen.

c) Untersuche, ob es möglich ist, das Ziel mit weniger als 12 Spielzügen zu erreichen.

Olympiadeklassen **9–10**

62. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

621011

a) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

621012

In dieser Aufgabe betrachten wir Summen von Quadratzahlen. Die kleinste der hier betrachteten Quadratzahlen soll die Eins mit $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ sein. Die nächstgrößeren sind dann 4 wegen $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ und 9 wegen $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ usw.

a) Vereinfachen Sie den Term

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)^2+(2ac)^2+(2bc)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 .$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von drei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Dabei darf eine Quadratzahl auch mehrfach als Summand auftreten.

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von 2022 Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Auch hier darf eine Quadratzahl mehrfach als Summand auftreten.

Hinweis: Es gibt für den Aufgabenteil c) auch Beispiele, bei denen alle Summanden paarweise verschieden sind. Finden Sie ein Beispiel?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

621013

Eine positive ganze Zahl n, die sich in der Form $n = a^2 + b^3$ mit positiven ganzen Zahlen a, b darstellen lässt, bezeichnen wir als *QK-Zahl* und alle anderen positiven ganzen Zahlen als *Nicht-QK-Zahl*.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der QK-Zahlen im Bereich von 1 bis einschließlich 100.

b) Entscheiden Sie, ob es im Bereich von 1 bis 1 000 000 mehr QK-Zahlen als Nicht-QK-Zahlen gibt.

Hinweis: 40 027 ist eine *QK-Zahl*, da $40\,027 = 200^2 + 3^3$ gilt und 200 sowie 3 positive ganze Zahlen sind.

621014

In einen Halbkreis mit Mittelpunkt M über dem Durchmesser $\overline{UV}$ mit $\left|\overline{UV}\right| = 12$ sei ein Quadrat $ABCD$ eingezeichnet, wobei A und B auf dem Durchmesser sowie C und D auf dem Halbkreis liegen. Weiter sei ein Quadrat $BEFG$ eingezeichnet, wobei B zwischen M und E auf dem Durchmesser $\overline{UV}$, F auf dem Halbkreis und G auf der Strecke $\overline{BC}$ liegen.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur und begründen Sie Ihr Vorgehen.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A_{ABCD} des Quadrats $ABCD$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathrm{A}_{BEFG}$ gilt.

Hinweis: Die Zeichnung darf auch mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms angefertigt werden.

621015

In einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ seien u die Summe der Seitenlängen (also der Umfang des Fünfecks) und d die Summe der Diagonalenlängen.

a) Zeigen Sie, dass stets $d < 2u$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass stets $u < d$ gilt.

Hinweis: Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

621016

2022 Piraten haben auf einer Insel einen Schatz, bestehend aus 10 000 Kokosnüssen, erbeutet. Sie wollen jetzt die Kokosnüsse einigermaßen gerecht unter sich aufteilen und gehen dazu wie folgt vor:

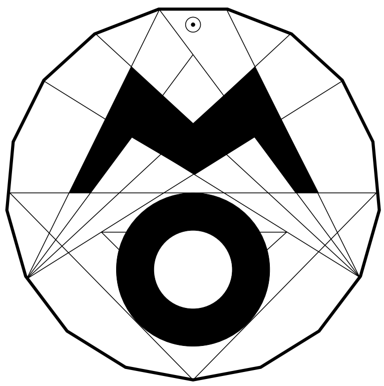
Alle Kokosnüsse werden auf einen Haufen gelegt und alle Piraten stellen sich in einer Schlange auf. Der Reihe nach geht jeweils der erste Pirat aus der Schlange zum Kokosnusshaufen, teilt die Anzahl der noch verbliebenen Kokosnüsse durch die Anzahl der verbliebenen Piraten, zu denen er selber auch gehört, rundet das Ergebnis auf die nächstgelegene ganze Zahl auf oder ab, nimmt sich entsprechend viele Kokosnüsse und segelt mit ihnen nach Hause. Dann ist der nächste Pirat dran und so weiter.

Bestimmen Sie, wie viele Kokosnüsse

a) die ersten drei Piraten,
b) die Piraten, die am Anfang an 1803. und 1804. Stelle stehen,
c) die letzten beiden Piraten

erhalten.

Hinweis: Ist die erste Ziffer nach dem Komma größer oder gleich fünf, so wird aufgerundet. Ist die erste Ziffer nach dem Komma kleiner als fünf, so wird abgerundet.



Olympiadeklassen **11–12**

62. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

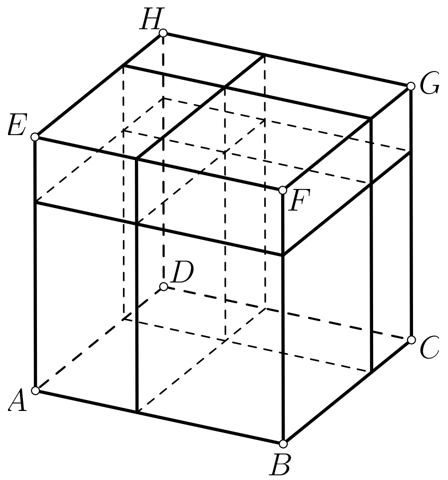
621211

Ein Quader $Q = ABCDEFGH$ setzt sich lückenlos aus acht Teilquadern zusammen, sodass jeder Teilquader nur einen Eckpunkt von Q enthält (Abbildung A 621211). Von sieben der acht Teilquader ist der in cm^2 gemessene Oberflächeninhalt bekannt:

$$O_A = 62\,,\quad O_B = 190\,,\quad O_C = 220\,,\quad O_E = 72\,,\quad O_F = 216\,,\quad O_G = 248 \quad \text{und} \quad O_H = 88\,.$$

Dabei bezeichnet O_P den Inhalt der Oberfläche des Quaders Q_P, der den Eckpunkt P des ursprünglichen Quaders Q enthält.

Man berechne den Oberflächeninhalt O_D des in der Skizze verdeckten achten Quaders.



A 621211

Hinweis: Zur Oberfläche der Teilquader gehören auch die verborgenen Flächen, also diejenigen, die nicht zur Oberfläche von Q gehören.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

621212

Streicht man von der Nummer dieser Aufgabe die führende Ziffer, so bleibt die ganze Zahl 21212. Diese hat fünf Stellen, für ihre Quersumme und ihr Querprodukt gilt

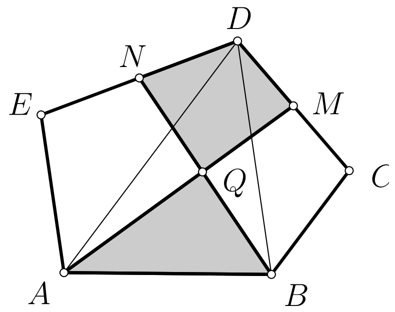
$$2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2\,.$$

Man ermittle, wie viele fünfstellige positive ganze Zahlen existieren, für die Quersumme und Querprodukt den gleichen Wert ergeben.

621213

Im konvexen Fünfeck $ABCDE$ ist die Seite $\overline{BC}$ parallel zur Diagonalen $\overline{AD}$, und die Seite $\overline{AE}$ ist parallel zur Diagonalen $\overline{BD}$. Die Punkte M und N sind die Mittelpunkte der Seiten $\overline{CD}$ beziehungsweise $\overline{DE}$. Der Punkt Q ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$.

Man beweise, dass das Viereck $MDNQ$ und das Dreieck ABQ flächengleich sind (Abbildung A 621213).



A 621213

621214

Eine aus 27 Kindern bestehende Schulklasse besucht einen Freizeitpark. Eine der Attraktionen ist ein regelmäßiges 77-Eck, in dessen Ecken jeweils ein steinerner Turm mit nur einem Fenster steht. Die Mauern sind dick und die Fenster so schmal, dass man daraus von allen anderen Türmen nur die Fenster der 26 Türme sehen kann, die am weitesten entfernt sind.

Die Kinder verteilen sich auf beliebige 27 der 77 Türme.

Man beweise, dass es stets zwei Kinder gibt, die sich gegenseitig sehen können.